EJERCICIOS RESUELTOS

NUMEROS REALES

1. Indicar a qué conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números:

$$\frac{-8}{4},\ \frac{18}{7},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ 1+\sqrt{3},\ \sqrt{-6},\ \sqrt[3]{4'25},\ \frac{3e}{2},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ \frac{6}{\sqrt[3]{8}}$$

Solución

$\frac{-8}{4} = -2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\frac{18}{7} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$-\sqrt{5} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$1+\sqrt{3} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{-6}$ no es un número real

$\sqrt[3]{4'25} = 1'61981 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\frac{3e}{2} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\frac{3}{\sqrt{5}} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\frac{6}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Realizar de forma detallada las siguientes operaciones simplificando el resultado:

a) $24:3.4$ **b)** $24:(3.4)$ **c)** $\frac{4}{15} + 6:\frac{2}{3}$ **d)** $\left(\frac{4}{15} + 6\right):\frac{2}{3}$

e) $5 + \frac{1}{4}\cdot 3:\frac{1}{2}$ **f)** $5 + \frac{1}{4}\cdot\left(3:\frac{1}{2}\right)$ **g)** $(\sqrt{2} - 1)\cdot(3 - \sqrt{2})$ **h)** $(3\sqrt{5} - 2)^2$

Solución

Para realizar este ejercicio se ha de tener en cuenta la jerarquía de las operaciones. En primer lugar, se realizan las operaciones de los paréntesis si los hay, después los productos y cocientes y para finalizar las sumas y restas. Además, si hay multiplicaciones y divisiones sin paréntesis se hacen las operaciones comenzando por la izquierda.

a) $24:3.4 = 8.4 = 32$

b) $24:(3.4) = 24:12 = 2$

c) $\frac{4}{15} + 6:\frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{18}{2} = \frac{4}{15} + 9 = \frac{4}{15} + \frac{9.15}{15} = \frac{4+135}{15} = \frac{139}{15}$

d) $\left(\frac{4}{15} + 6\right):\frac{2}{3} = \left(\frac{4}{15} + \frac{6.15}{15}\right):\frac{2}{3} = \frac{4+90}{15}:\frac{2}{3} = \frac{94}{15}:\frac{2}{3} = \frac{94.3}{15.2} = \frac{2.47.3}{3.5.2} = \frac{47}{5}$

e) $5 + \frac{1}{4}\cdot 3:\frac{1}{2} = 5 + \frac{3}{4}:\frac{1}{2} = 5 + \frac{3.2}{4.1} = 5 + \frac{3}{2} = \frac{5.2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$

f) $5 + \frac{1}{4}\cdot\left(3:\frac{1}{2}\right) = 5 + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{1} = 5 + \frac{6}{4} = \frac{5.4}{4} + \frac{6}{4} = \frac{26}{4} = \frac{2.13}{2^2} = \frac{13}{2}$

g) $(\sqrt{2} - 1)\cdot(3 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$

h) $(3\sqrt{5} - 2)^2 = 9.5 - 12\sqrt{5} + 4 = 49 - 12\sqrt{5}$

3. Dados los intervalos $A = (-\infty, -2]$, $B = (-3, 4]$ y $C = [4, 5)$ calcular:

a) $B \cup C$	**b)** $A \cap B$	**c)** $(A \cup B) \cap C$	**d)** $A \cup C^c$
e) $(A \cap C)^c$	**f)** $A^c \cap C^c$	**g)** $A^c \cap B$	**h)** $(A \cap (B \cup C))^c$

Solución

a) $B \cup C = (-3, 5)$

b) $A \cap B = (-3, -2]$

c) En primer lugar se realiza la operación del paréntesis, $A \cup B = (-\infty, 4]$ y, por tanto, se tiene:

$$(A \cup B) \cap C = \{4\}$$

d) En primer lugar se calcula el complementario de $C = [4, 5)$, quedando $C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$. Por tanto, $A \cup C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$.

e) $A \cap C = \varnothing$, de donde, $(A \cap C)^c = \mathbb{R}$.

f) Se calcula el complementario de $A = (-\infty, -2]$, $A^c = (-2, +\infty)$ y como del apartado d) se sabe que $C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$, se tiene $A^c \cap C^c = (-2, 4) \cup [5, +\infty)$.

g) En el apartado f) se ha obtenido que $A^c = (-2, +\infty)$, por tanto, $A^c \cap B = (-2, 4]$.

h) Para calcular $(A \cap (B \cup C))^c$, se calcula en primer lugar $B \cup C$ que por el apartado a) se sabe que es el intervalo $(-3, 5)$.

Por tanto, $A \cap (B \cup C) = (-3, -2]$ y su complementario es $(A \cap (B \cup C))^c = (-\infty, -3] \cup (-2, +\infty]$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$:

a) $2x - 4 = 6$	**b)** $2x + 6 = 4$	**c)** $5x + 7 = -x + 3$	**d)** $\frac{4}{3}x = \frac{1}{2}$
e) $3x^2 - 5 = 7$	**f)** $4 - x^2 = 1$	**g)** $2x^2 + 7x - 15 = 0$	**h)** $2x^2 + 3 = 0$

Solución

a) Despejando la incógnita de $2x - 4 = 6$ se tiene $x = (6+4):2 = 10:2 = 5$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

b) Despejando la incógnita de $2x + 6 = 4$ se tiene $x = (4-6):2 = -2:2 = -1$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{N}$, ya que -1 no es un número natural.

c) Pasando todos los términos al primer miembro de la igualdad, la ecuación $5x + 7 = -x + 3$ queda $6x + 4 = 0$ y despejando la incógnita se tiene, $x = -4:6 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$ ya que la fracción $\frac{-2}{3}$ no es un número entero y, por tanto, tampoco natural.

d) Despejando la incógnita de la ecuación $\frac{4}{3}x = \frac{1}{2}$ se tiene $x = \frac{1}{2}:\frac{4}{3} = \frac{3}{8}$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$.

e) Despejando x^2 de la ecuación $3x^2 - 5 = 7$ se tiene $x^2 = (7+5):3 = 12:3 = 4$, de donde, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, $x = 2$ y $x = -2$, en $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{N}$; sin embargo, tiene una única solución, $x = 2$, en $\mathbb{N}$ ya que -2 no es un número natural.

f) Despejando x^2 de la ecuación $4 - x^2 = 1$ se tiene $x^2 = 4-1 = 3$, de donde, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, en $\mathbb{R}$ y no tiene ninguna solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, ya que $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales.

g) Resolviendo la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$, se tiene:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-15)}}{2.2} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4} = \begin{cases} -5 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto, en $\mathbb{N}$ la ecuación no tiene ninguna solución, en $\mathbb{Z}$ tiene una sola solución, $x = -5$, y en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tiene dos soluciones, $x = -5$ y $x = \frac{3}{2}$.

h) Despejando x^2 de la ecuación $2x^2 + 3 = 0$ se tiene $x^2 = \frac{-3}{2}$, de donde se deduce que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ ya que el cuadrado de cualquier número real no puede ser negativo. Por tanto, tampoco tiene solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

5. Determinar si cada una de las siguientes igualdades es una ecuación o una identidad:

a) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **b)** $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9 + 6x$ **c)** $(x - 3)^2 + 5 = x - 4$

Solución

a) Es una identidad, ya que es el desarrollo del cuadrado de la diferencia entre x y 2, verificándose, en consecuencia, para cualquier valor de la incógnita.

b) Es una ecuación y no una identidad ya que la igualdad no se verifica para todos los valores de x; por ejemplo, no se cumple para $x = 1$.

c) Es una ecuación y no una identidad ya que por ejemplo $x = 0$ no verifica la igualdad.

6. Indicar si en los siguientes razonamientos hay algún error.

a) $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x(x - 3) = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$

Solución

a) El razonamiento es correcto. Observar que la segunda implicación se basa en la siguiente propiedad: "Un producto es cero cuando alguno de sus factores es igual a cero".

b) Hay un error en la tercera implicación, ya que para que el producto de dos factores sea 4 no es necesario que uno de ellos sea 4.

7. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $5x + 4 = 13 + 2x$ **b)** $(x + 1)^2 - x = x^2 + x - 4$ **c)** $4x^2 - 13x - 12 = 0$

d) $8x^2 + 25 = (x + 5)^2$ **e)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$

Solución

a) Pasando todos los términos a un lado se obtiene la ecuación equivalente, $3x - 9 = 0$, cuya solución, sin más que despejar la incógnita, es $x = \frac{9}{3} = 3$.

Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 3$.

b) Desarrollando el cuadrado del primer miembro queda, $x^2 + 2x + 1 - x = x^2 + x - 4$, y pasando todos los términos al primer miembro se obtiene, $5 = 0$, que es un absurdo.
Por tanto, la ecuación dada no tiene solución.

c) Aplicando la fórmula que permite obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, se tiene $x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.4.(-12)}}{2.4} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 192}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{13 \pm 19}{8} = \begin{cases} 4 \\ \frac{-3}{4} \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = 4$ y $x = \frac{-3}{4}$.

d) Desarrollando el cuadrado del segundo miembro queda, $8x^2 + 25 = x^2 + 10x + 25$, y pasando todos los términos al primer miembro se obtiene la ecuación equivalente, $7x^2 - 10x = 0$.
Sacando factor común la x queda, $x(7x - 10) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $7x - 10 = 0$, de donde, $x = \frac{10}{7}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{10}{7}$.

e) Aplicando la fórmula que permite obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, se tiene $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.3.4}}{2.3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6}$.
Al ser el discriminante negativo, se concluye que la ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$.

8. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $x^4 - 4 = 0$ **b)** $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

Solución

a) Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 - 4 = 0$.

Despejando t^2 queda, $t^2 = 4$, de donde, $t = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Así:

- $t = -2 \Rightarrow x^2 = -2$, ecuación que no tiene solución
- $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

b) Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $2t^2 + 3t + 2 = 0$, que no tiene solución puesto que su discriminante es negativo, $3^2 - 4.2.2 = -7 < 0$.

Por tanto, la ecuación inicial no tiene solución en $\mathbb{R}$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ **b)** $2x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$

Solución

a) El polinomio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ tiene como raíz $x = -1$ ya que $(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = 0$. Dividiendo, mediante la regla de Ruffini, dicho polinomio por $x - (-1)$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede escribir de la forma $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$ y, teniendo en cuenta que $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, de la forma $(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$. De esta manera, sus soluciones son los valores que anulan uno cualquiera de los factores $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x + 2)$:

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$

b) Sacando factor común x^2 en el polinomio del primer miembro de la ecuación, ésta se puede escribir de la forma, $x^2(2x^2 - x - 3) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, doble

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ doble, $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$

10. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ **b)** $\dfrac{3}{x - 1} = \dfrac{8x}{2x - 1}$

Solución

a) Las soluciones de la ecuación son los valores de x que anulan el numerador y no anulan el denominador.

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - 5x + 4 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Hay que comprobar si estos valores anulan el denominador, $x^2 + 2x + 1$, de la ecuación inicial. En este caso, no se anula para ninguno de estos valores, por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $x = 1$ y $x = 4$.

b) En primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0.

Pasando todos los términos al primer miembro queda, $\frac{3}{x - 1} - \frac{8x}{2x - 1} = 0$. Restando las fracciones se obtiene, $\frac{3(2x - 1) - 8x\,(x - 1)}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$, y haciendo operaciones, $\frac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)\,(2x - 1)} = 0$.

Para resolver la ecuación $\frac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)\,(2x - 1)} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose:

$-8x^2 + 14x - 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-8)(-3)}}{2(-8)} = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{-16} = \frac{-14 \pm 10}{-16} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

Al no anularse ninguno de los dos denominadores de la ecuación inicial para estos valores, se concluye que las soluciones de dicha ecuación son $x = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{3}{2}$.

11. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ **b)** $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$

Solución

a) Se despeja la única raíz que aparece en la ecuación, quedando

$$2x - 6 = \sqrt{2x}$$

se elevan al cuadrado ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$(2x - 6)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 24x + 36 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 26x + 36 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación polinómica son:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4.4.36}}{2.4} = \frac{26 \pm \sqrt{676-576}}{8} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{26 \pm 10}{8} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ 2 \end{cases}$$

Se ha de comprobar si estas soluciones lo son también de la ecuación inicial ya que al haber elevado al cuadrado, la ecuación obtenida puede no ser equivalente:

- sustituyendo $x = \frac{9}{2}$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $4 = 4$, de donde se concluye que $x = \frac{9}{2}$ es solución de la ecuación inicial

- sustituyendo $x = 2$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $-1 = 3$, de donde se concluye que $x = 2$ no es solución de la ecuación inicial

En conclusión, la única solución de la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ es $x = \frac{9}{2}$.

b) Se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose:

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^3 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{x} = 8$$

Despejando la raíz en esta última ecuación queda, $\sqrt{x} = 7$ y elevando ambos términos al cuadrado se obtiene $x = 49$.

Sustituyendo $x = 49$ en la ecuación $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2$ queda $2 = 2$ y, por tanto, se tiene que $x = 49$ es solución de la ecuación inicial.

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\ln(2x^2-2) - 2\ln(x-1) = 0$ **b)** $e^{x+2} - e^{x+1} + e^x = 1$

Solución

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, la ecuación dada es equivalente a la ecuación $\ln(2x^2-2) = \ln(x-1)^2$.

Al ser la función logaritmo inyectiva, se obtiene la ecuación polinómica equivalente $2x^2 - 2 = (x-1)^2$.

Realizando operaciones, queda

$$2x^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Los logaritmos de la ecuación inicial, $\ln(2x^2-2) - 2\ln(x-1) = 0$, no están definidos para ninguno de estos valores de x, en consecuencia, se deduce que dicha ecuación no tiene solución.

b) Sacando factor común e^x en el primer miembro de la ecuación, ésta se puede escribir de la forma, $e^x(e^2-e+1) = 1$.

Despejando e^x queda, $e^x = \dfrac{1}{e^2 - e + 1}$.

Por tanto, la solución de la ecuación dada es $x = \ln\dfrac{1}{e^2 - e + 1} = \ln 1 - \ln(e^2 - e + 1) = -\ln(e^2 - e + 1)$.

13. Resolver el sistema $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$ por el método de igualación

Solución

Se despeja una de las incógnitas, por ejemplo la y, de las dos ecuaciones quedando $\begin{cases} y = 3 + 2x \\ y = \dfrac{6x - 10}{2} = 3x - 5 \end{cases}$ de donde igualando los dos miembros queda $3 + 2x = 3x - 5$

Despejando x de esta igualdad se tiene $x = 8$, y sustituyéndolo en $y = 3 + 2x$ se obtiene $y = 3 + 2.8 = 19$. Por tanto, la solución del sistema es (8, 19).

14. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución.

Solución

Para buscar su solución por el método de sustitución se elige una incógnita para despejarla, en este caso se despeja y de la tercera ecuación quedando $y = \dfrac{3 - 3z}{2}$

Sustituyendo esta expresión en la primera y segunda ecuación se obtiene:

$$2x + \frac{3 - 3z}{2} + z = 1 \qquad\qquad 3x - \frac{3 - 3z}{2} + z = 0$$

Operando se tiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 4x - z = -1 \\ 6x + 5z = 3 \end{cases}$

Despejando z de la primera ecuación se obtiene $z = 4x + 1$ y sustituyendo z en la segunda queda $6x + 20x + 5 = 3$, es decir, $26x = -2$, cuya solución es $x = \dfrac{-2}{26} = \dfrac{-1}{13}$

Al sustituir este valor en $z = 4x + 1$ queda $z = \dfrac{9}{13}$, y al sustituirlo en $y = \dfrac{3 - 3z}{2}$ se obtiene $y = \dfrac{6}{13}$.

Luego la solución del sistema es $x = \dfrac{-1}{13}$, $y = \dfrac{6}{13}$, $z = \dfrac{9}{13}$.

15. Resolver el sistema $\begin{cases} 5\ e^x + y^2 = 5 \\ e^x - y = 1 \end{cases}$ por el método de reducción.

Solución

Para obtener una ecuación sin la incógnita x se multiplica la segunda ecuación por -5 quedando el sistema $\begin{cases} 5e^x + y^2 = 5 \\ -5e^x + 5y = -5 \end{cases}$ y sumando las dos ecuaciones queda $y^2 + 5y = 0$

Sustituyendo la primera ecuación del sistema dado por $y^2 + 5y = 0$ se obtiene el sistema equivalente $\begin{cases} y^2 + 5y = 0 \\ e^x - y = 1 \end{cases}$

Sacando factor común y de la primera ecuación obtenemos $y(y+5) = 0$ de donde, $y = 0$, $y = -5$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación queda:

$$y = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$y = -5 \Rightarrow e^x + 5 = 1 \Rightarrow e^x = -4$, ecuación que no tiene solución

Luego la solución del sistema es (0, 0).

16. Resolver por el método de sustitución el sistema $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

Solución

En primer lugar, despejamos la incógnita y de la segunda ecuación quedando $y = 2x + 3$

Se sustituye en la primera ecuación obteniendo $x^2 + 2x + 3 = 2$, que es una ecuación con una incógnita y resolviéndola queda:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Sustituyendo este valor de x en $y = 2x + 3$, se obtiene y = -2+3 = 1

Por tanto, la solución del sistema es (-1, 1).

17. Resolver los sistemas: **a)** $\begin{cases} x^3 - y = 1 \\ x^2 = z + 2 \\ -5x^2 + 5x = -1 - y - z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = 9 \end{cases}$

Solución

a) Para resolver el sistema podemos aplicar cualquiera de los métodos expuestos en la parte teórica, pero dadas las características del sistema comenzaremos despejando y de la primera ecuación y z de la segunda para sustituirlas en la tercera ecuación, quedando así una ecuación con x como única incógnita.

$y = x^3 - 1 \quad , \quad z = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad -5x^2 + 5x = -1 - x^3 + 1 - x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

Factorizando el polinomio queda $(x-1)^2(x-2) = 0$, es decir, $x = 1$, $x = 2$

Sustituyendo estos valores en $y = x^3 - 1$ y en $z = x^2 - 2$ obtenemos:

$x = 1, \quad y = 0, \quad z = -1$
$x = 2, \quad y = 7, \quad z = 2$

Por tanto, las soluciones del sistema son (1, 0, -1) y (2, 7, 2).

b) Para que se verifique la primera ecuación $2xy = 0$, o bien $x = 0$ o bien $y = 0$.

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación queda:

$$x = 0 \Rightarrow 2y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \qquad y = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $(0, \frac{9}{2})$, (3, 0) y (-3, 0).

18. Resolver el sistema $\begin{cases} \ln(x-1) = y + 1 \\ y + z = 2 \\ z^2 + 6y = 3 \end{cases}$

Solución

Para resolver este sistema se elige una incógnita que se pueda despejar fácilmente, por ejemplo la y de la segunda ecuación, quedando $y = 2 - z$, y se sustituye en la tercera ecuación obteniéndose $z^2 + 6(2 - z) = 3$, es decir, $z^2 - 6z + 9 = 0$.

Factorizando esta ecuación de z se tiene $(z - 3)^2 = 0$ y por tanto la solución es $z = 3$.

Sustituyendo este valor de z en $y = 2 - z$ queda $y = -1$, pudiendo así escribirse la primera ecuación de la forma $\ln(x - 1) = 0$.

Para resolver esta ecuación se aplica la función exponencial, ya que es la inversa del logaritmo, quedando $e^{\ln(x-1)} = e^0$, es decir, $x - 1 = 1$ y por tanto, $x = 2$.

Luego, la solución del sistema es (2, -1, 3).

ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES. INECUACIONES

19. Ordenar los siguientes números reales de menor a mayor: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, 4, -2, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{15}{2}$.

Solución

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

- Teniendo en cuenta la expresión decimal de cada número:
  $\frac{1}{4} = 0'25$ $\frac{2}{3} = 0'\widehat{6}$ $\sqrt{5} = 2'23606797...$ $\frac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$ $-\frac{15}{2} = -7'5$
  se deduce que $-\frac{15}{2} < -2 < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \sqrt{5} < 4$.

- Expresando todos los números en forma de fracción y reduciéndolas a común denominador. Al ser m.c.m.{2, 4, 3, 6} = 12, se tiene:
  $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $4 = \frac{48}{12}$, $-2 = -\frac{24}{12}$, $\sqrt{5} = \frac{12\sqrt{5}}{12}$, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ $-\frac{15}{2} = -\frac{90}{12}$
  Comparando los numeradores de las fracciones de denominador 12, se deduce:
  $$-\frac{90}{12} < -\frac{24}{12} < \frac{2}{12} < \frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{12\sqrt{5}}{12} < \frac{48}{12}$$
  y, por tanto, $-\frac{15}{2} < -2 < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \sqrt{5} < 4$.

20. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $A = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid \frac{5-2x}{4+x} < 0 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid \frac{x+2}{x-2} \geq 0 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \right\}$

d) $D = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid \frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0 \right\}$ **e)** $E = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid x^2 + 4x \leq 3x - 2 \right\}$

Solución

a) A continuación se calcula el conjunto de valores de x que verifican $\frac{5-2x}{4+x} < 0$:

$$\frac{5-2x}{4+x} < 0 \iff \begin{cases} 5-2x < 0 \text{ y } 4+x > 0 \iff x > \frac{5}{2} \text{ y } x > -4 \iff x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \\ \text{o} \\ 5-2x > 0 \text{ y } 4+x < 0 \iff x < \frac{5}{2} \text{ y } x < -4 \iff x \in (-\infty, -4) \end{cases}$$

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = (-\infty, -4) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Para calcular el conjunto de valores de x que verifican $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ se puede proceder como en el apartado a) o bien estudiar el signo del numerador y del denominador en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 2$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$\frac{x+2}{x-2}$	+	-	+

Teniendo en cuenta que -2 anula al numerador y 2 al denominador, entonces la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x para los que el polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x$ es negativo. Para determinar dichos valores se factoriza el polinomio y se estudia el signo de cada factor en los intervalos determinados por los puntos que anulan el polinomio, como se muestra a continuación.

Las raíces del polinomio son:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 3x - 4) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \iff$$

$$\iff x = 0,\ x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

por tanto, al ser las raíces $x = 0$, -1 y 4, el polinomio se puede factorizar como sigue:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x+1)(x-4)$$

En la siguiente tabla se determina el signo del polinomio según los valores de x:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
x	-	-	+	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
$x^3 - 3x^2 - 4x$	-	+	-	+

Así, el polinomio es negativo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 4)$, de donde, $C = (-\infty, -1) \cup (0, 4)$.

d) Para determinar los valores de x que verifican $\frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0$ se factorizan los polinomios del numerador y del denominador quedando

$$\frac{x^2-4}{3x-9} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$$

y se estudia su signo en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -2)	(-2, 2)	(2, 3)	(3, +∞)
x - 2	-	-	+	+
x + 2	-	+	+	+
x - 3	-	-	-	+
$\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$	-	+	-	+

Por tanto, la fracción polinómica es positiva en los intervalos (-2, 2) y (3, +∞) y se anula en los valores de x que anulan el polinomio del numerador, es decir, en -2 y 2. Así, $D = [-2, 2] \cup (3, +\infty)$.

e) Los puntos del conjunto E han de verificar la inecuación $x^2 + 4x \leq 3x - 2$, que se puede escribir de la forma:

$$x^2 + 4x \leq 3x - 2 \iff x^2 + 4x - 3x + 2 \leq 0 \iff x^2 + x + 2 \leq 0$$

Para determinar los valores de x que verifican la anterior desigualdad, se factoriza $x^2 + x + 2$, para lo que se calculan sus raíces:

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Al no tener el polinomio raíces reales, el signo de éste es el mismo para cualquiera valor de x. Como, por ejemplo, para $x = 0$ el valor del polinomio es 2, se concluye que el polinomio es siempre positivo.

Por tanto, $E = \emptyset$.

21. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $A = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |2x - 1| \leq 1 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |x^2 - 1| > 2 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathrm{R} \mid |x + 1| > 2x + 5 \right\}$

Solución

a) El conjunto A está formado por las soluciones de la inecuación $|2x - 1| \leq 1$, que se resuelve a continuación teniendo en cuenta la propiedad "$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$":

$$|2x - 1| \leq 1 \iff -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \iff 0 \leq 2x \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 1$$

Por tanto, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = [0, 1]$.

b) El conjunto B está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x^2 - 1| > 2$. Utilizando la propiedad "$|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$", se tiene:

$$|x^2 - 1| > 2 \iff x^2 - 1 > 2 \text{ o } x^2 - 1 < -2$$

Por tanto, analizando cada una de estas dos posibilidades, queda:

- $x^2 - 1 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ o $x < -\sqrt{3} \iff x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- $x^2 - 1 < -2 \Leftrightarrow x^2 < -1$, lo que no es posible para ningún valor real de x

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x + 1| > 2x + 5$. Estos valores se pueden calcular como en el apartado anterior o aplicando la definición de valor absoluto como sigue:

- Si $x + 1 \geq 0$, entonces $|x + 1| = x + 1$ y la inecuación queda $x + 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $x < -4$, que es incompatible con el supuesto de partida $x + 1 \geq 0$. Por tanto, la inecuación no tiene solución.

- Si $x + 1 < 0$, entonces $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ y la inecuación queda $-x - 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $3x + 6 < 0$, es decir, $x < -2$. Como los valores que cumplen $x < -2$ verifican también el supuesto de partida, $x + 1 < 0$, la solución es $(-\infty, -2)$.

En consecuencia, el conjunto C es el intervalo $(-\infty, -2)$.

22. Resolver las inecuaciones: **a)** $3 - 2x \geq 8 - 7x$ **b)** $\dfrac{6 - 2x}{5} > \dfrac{1 - x}{10}$

Solución

a) Para resolver la inecuación, se pasan los términos con x al primer miembro y los términos independientes al segundo quedando $5x \geq 5$.

Multiplicando por $\dfrac{1}{5}$, para despejar la x, se obtiene $x \geq 1$.

Por tanto, las soluciones son los números del conjunto $[1, +\infty)$.

b) Se eliminan los denominadores de la inecuación, multiplicando por 10, $12 - 4x > 1 - x$

se pasan los términos con x al primer miembro y los términos independientes al segundo, $-3x > -11$

se divide por -3 cambiándose la desigualdad de sentido al ser -3 un número negativo, $x < \dfrac{11}{3}$.

Por tanto, las soluciones son los números del conjunto $\left(-\infty, \dfrac{11}{3}\right)$.

23. Resolver las inecuaciones: **a)** $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$ **b)** $3x^2 + 4 < x^4 + 3x^3 + 3x$

Solución

a) Al ser una inecuación polinómica de segundo grado, se agrupan todos los términos en un miembro, por ejemplo, si se pasan al primero queda $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

Como las raíces del polinomio $-2x^2 + 3x + 5$ son $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)5}}{2(-2)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$,

la inecuación se puede escribir de la forma $-2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \leq 0$, y multiplicando por -1 se obtiene $2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \geq 0$.

En la siguiente tabla se estudia el signo de los factores, en los intervalos determinados por las raíces, para obtener el signo del polinomio.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$x + 1$	-	+	+
$x - \frac{5}{2}$	-	-	+
$2(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$	+	-	+

Así los puntos del conjunto $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ son solución de la inecuación. Además, como los extremos de los intervalos también son solución, por ser la desigualdad no estricta, se tiene que el conjunto de soluciones es $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Se pasan todos términos al segundo miembro quedando $0 < x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.
Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\
-4 & & -4 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda de la forma $0 < (x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$.
Como el último factor es siempre positivo, para determinar el signo del polinomio, basta considerar el signo de los dos primeros factores, como se muestra en la tabla siguiente.

Signo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 4$	-	+	+
$(x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

24. Resolver la inecuación $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} > \dfrac{x^2 - 2}{x}$

Solución

Observar que si se multiplica en cruz, la desigualdad podría cambiar de sentido dependiendo del signo de los denominadores. Por ello es mejor realizar las siguientes operaciones, con el objeto de agrupar en un miembro todos los términos.

Se pasa restando el segundo miembro al primero, $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \dfrac{x^2 - 2}{x} > 0$.

Realizando operaciones en el primer miembro de la inecuación queda

$$\frac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2}{x(x + 1)} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2 - (x^2 - 2)\,(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)}$$

y factorizando el numerador se obtiene $\frac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)} = \frac{x\,(6 - x^2)}{x\,(x + 1)} = \frac{x\,(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x\,(x + 1)}$.

Teniendo en cuenta que x no puede ser cero, ya que este valor anula los denominadores de la inecuación inicial, se puede simplificar x en la expresión anterior obteniéndose la siguiente inecuación equivalente a la inicial, $\frac{(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x + 1} > 0$. Para resolverla, se analiza el signo de cada factor como se muestra en la siguiente tabla.

Signo	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, -1)$	$(-1, 0) \cup (0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, +\infty)$
$\sqrt{6} + x$	-	+	+	+
$\sqrt{6} - x$	+	+	+	-
$x + 1$	-	-	+	+
$\frac{(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x + 1}$	+	-	+	-

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \sqrt{6}\right)$.

GEOMETRÍA EN EL PLANO. ECUACIONES E INECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

25. Escribir la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (5, -2) y (2, 4).

Solución

Como la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$, la de la recta que pasa por (5, -2) y (2, 4) es $\frac{x - 5}{2 - 5} = \frac{y + 2}{4 + 2}$.

Despejando la variable y se obtiene la ecuación explícita de la recta, $y = -2x + 8$.

26. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, 1) y tiene por vector direccional (8, 3).

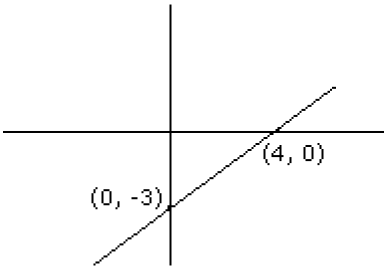
Solución

Como la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y es paralela al vector no nulo (a, b) es $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$, la de la recta que pasa por el punto (-2, 1) y tiene por vector direccional (8, 3) es $\frac{x + 2}{8} = \frac{y - 1}{3}$.

Realizando operaciones se obtiene la ecuación general de la recta, $3x - 8y = -14$.

27. Escribir la ecuación de la recta que corta al eje de abscisas en 4 y al de ordenadas en -3.

Solución



La recta pasa por los puntos (4, 0) y (0, -3), por tanto, su ecuación es $\frac{x-4}{0-4} = \frac{y-0}{-3-0}$.

Despejando la variable y se obtiene la ecuación explícita de la recta, $y = \frac{3}{4}x - 3$.

28. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, -3) y es paralela a la recta $y = 7 - 2x$.

Solución

La ecuación explícita buscada es de la forma $y = mx + p$, siendo m la pendiente de la recta. Como esta recta es paralela a la de ecuación $y = 7 - 2x$ tendrá la misma pendiente, es decir, $m = -2$.

Por tanto, la ecuación es de la forma $y = -2x + p$.

Para calcular el valor de p se impone que el punto (1, -3) sea de la recta, sustituyendo en la ecuación queda $-3 = -2 + p$, de donde se deduce que $p = -1$.

Así la ecuación de la recta es $y = -2x - 1$.

29. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:

a) el centro en el punto (2, 5) y el radio es igual a 7.

b) un diámetro con extremos los puntos (8, -2) y (2, 6).

Solución

a) La ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$.

Así, la ecuación de la circunferencia pedida es $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

Realizando operaciones queda $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$.

b) El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro de extremos (8, -2) y (2, 6), es decir, $\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (5, 2)$

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo al (8, -2), es decir, $r = d((8, -2), (5, 2)) = \sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y realizando operaciones.

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

30. Calcular el centro y el radio de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$.

Solución

Escribiendo la ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ se obtiene que el centro es (a, b) y el radio r.

Pasando el término independiente de la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$ al segundo miembro y dividiendo por 2 queda $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}$.

Agrupando términos hasta obtener cuadrados perfectos queda:

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \iff x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = \frac{5}{2} \iff \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{37}{8}$$

Por tanto, el centro es el punto $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ y el radio es igual a $\sqrt{\frac{37}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37}{2}}$

31. Indicar qué curvas verifican las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$

c) $-xy = 5$

d) $x = -3y^2 + y + 5$

e) $y^2 = 36x$

f) $y = x^2 - 2x + 3$

g) $4xy = 120$

Solución

a) Para comprobar si la ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ corresponde a una circunferencia, se forman cuadrados perfectos para determinar su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \iff (x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

En efecto, la ecuación corresponde a una circunferencia de centro (-1, -3) y radio 3.

b) La ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$ puede corresponder a una circunferencia ya que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales. Veamos si es así dividiéndola primero por 2 y formando luego cuadrados perfectos.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + \frac{19}{2} = 0 \iff \left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 2y\right) + \frac{19}{2} = 0 \iff$$

$$\iff (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + \frac{19}{2} = 0 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{-15}{2}$$

Esta ecuación no corresponde a ninguna curva del plano, ya que la suma de cuadrados no puede ser igual a un número negativo.

c) La ecuación $-xy = 5$ se puede escribir de la forma $xy = -5$, que corresponde a una hipérbola que está en el segundo y cuarto cuadrante al ser $-5 < 0$.

d) La ecuación $x = -3y^2 + y + 5$ corresponde a una parábola de eje horizontal $y = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$, y ramas hacia la izquierda, ya que el coeficiente de y^2 es negativo. La ordenada del vértice es $y = \frac{1}{6}$ y su abscisa es $x = -3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} + 5 = \frac{61}{12}$

e) La ecuación $y^2 = 36x$ corresponde a una parábola de de eje horizontal $y = 0$, vértice (0, 0) y ramas hacia la derecha.

f) La ecuación $y = x^2 - 2x + 3$ corresponde a una parábola de eje vertical $x = \frac{2}{2} = 1$, vértice (1, 2) y ramas hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

g) La ecuación $4xy = 120$ se puede escribir de la forma $xy = 30$, que corresponde a una hipérbola que está en el primer y tercer cuadrante al ser $30 > 0$.

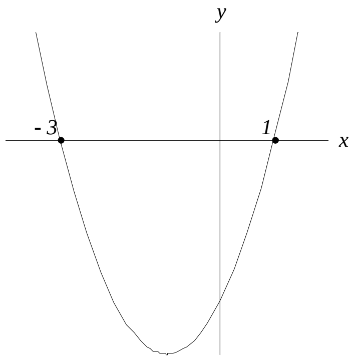
32. Resolver las siguientes ecuaciones con dos incógnitas:

a) $x^2 + 2x - 3 - y = 0$ **b)** $x^2 - 4x + y^2 = 0$

Solución

a) Despejando y en función de x queda $y = x^2 + 2x - 3$.

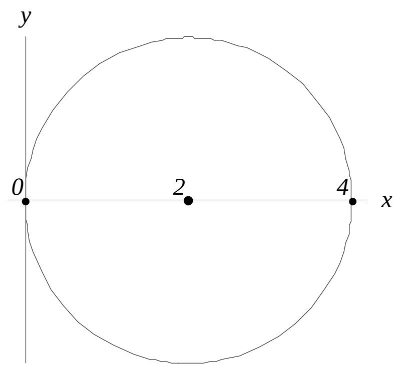
Así, la solución de la ecuación dada está formada por los puntos de la parábola $y = x^2 + 2x - 3$, es decir, los puntos de la forma $(x, x^2 + 2x - 3)$, cuya representación se muestra en la siguiente figura:



b) En primer lugar, para determinar si la ecuación inicial corresponde a la de una circunferencia de centro (a, b) y radio r, se intenta escribir la ecuación dada de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar dos cuadrados perfectos a partir de la expresión $x^2 - 4x + y^2$:

$$x^2 - 4x + y^2 = (x^2 - 4x) + y^2 = (x - 2)^2 - 4 + y^2$$

Por tanto, la ecuación se puede escribir de la forma, $(x - 2)^2 - 4 + y^2 = 0$, equivalentemente, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. En consecuencia, su solución es la circunferencia de centro el punto (2, 0) y radio 2 representada en la siguiente figura:



33. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x + 8 < 3(x-1)^2 \end{cases}$

Solución

Se comienza resolviendo cada inecuación por separado y después se halla la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la primera inecuación se factoriza el polinomio $-x^2 + 5x - 4$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $-(x-1)(x-4) \geq 0$, es decir, $(x-1)(x-4) \leq 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que intervienen en la inecuación en los intervalos determinados por las raíces del polinomio.

Signo	(-∞, 1)	(1, 4)	(4, +∞)
x - 1	-	+	+
x - 4	-	-	+
$(x-1)(x-4)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos, 1 y 4, son solución de la inecuación. Por tanto, la solución de la primera inecuación es S_1 = [1, 4].

Para resolver la inecuación $3x^2 - 4x + 8 < 3(x-1)^2$ se realizan las siguientes operaciones:

$$3x^2 - 4x + 8 < 3(x-1)^2 \iff 3x^2 - 4x + 8 < 3x^2 - 6x + 3 \iff 2x < -5 \iff x < -\frac{5}{2}$$

Así, la solución de la segunda inecuación es $S_2 = \left(-\infty , -\dfrac{5}{2}\right)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es S = $S_1 \cap S_2$ = [1, 4] $\cap \left(-\infty , -\dfrac{5}{2}\right) = \varnothing$, es decir no tiene solución.

34. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-5} < 0 \end{cases}$

Solución

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\frac{x^2-3x+2}{x-4} \geq 0$ se factoriza el polinomio x^2-3x+2, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $\frac{(x-1)(x-2)}{x-4} \geq 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que intervienen en la ecuación en los intervalos determinados por sus raíces.

Signo	(-∞, 1)	(1, 2)	(2, 4)	(4, +∞)
x - 1	-	+	+	+
x - 2	-	-	+	+
x - 4	-	-	-	+
$\frac{(x-1)(x-2)}{x-4}$	-	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos, 1 y 2, son solución de la inecuación, pero no lo es 4 ya que anula el denominador.

Por tanto, la solución de la primera inecuación es $S_1 = [1, 2] \cup (4, +\infty)$.

La inecuación $\frac{x+1}{x-5} < 0$ se resuelve estudiando el signo del numerador y denominador en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 5)	(5, +∞)
x + 1	-	+	+
x - 5	-	-	+
$\frac{x+1}{x-5}$	+	-	+

Como la desigualdad es estricta $x = 1$ no verifica la inecuación y $x = 5$ tampoco ya que anula el denominador. Así, la solución de la segunda inecuación es $S_2 = (-1, 5)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es

$$S = S_1 \cap S_2 = \left([1, 2] \cup (4, +\infty)\right) \cap (-1, 5) = [1, 2] \cup (4, 5).$$

35. Resolver el sistema $\begin{cases} x^2-4 \leq -y^2+2y-1 \\ y-x^2 \leq 0 \end{cases}$ y representar gráficamente su solución.

Solución

Para resolver la primera inecuación se realizan las siguientes operaciones con objeto de completar cuadrados:

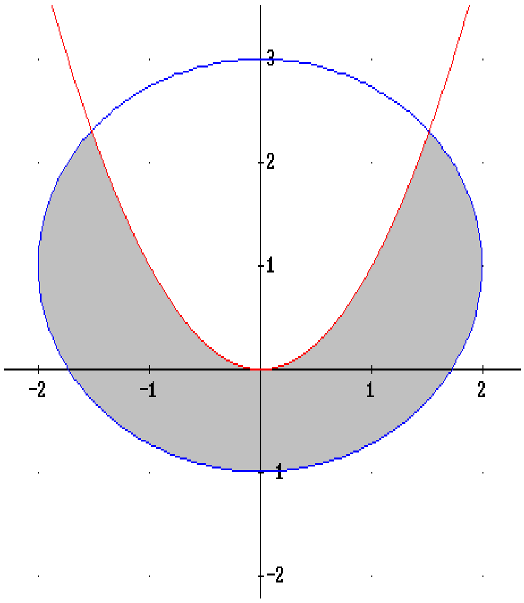
$$x^2-4 \leq -y^2+2y-1 \iff x^2+y^2-2y \leq 3 \iff x^2+(y-1)^2-1 \leq 3 \iff x^2+(y-1)^2 \leq 4$$

Para representar gráficamente la solución de esta inecuación dibujamos la curva $x^2 + (y-1)^2 = 4$ que es la circunferencia de centro (0, 1) y radio 2 y se considera la región donde se verifica $x^2 + (y-1)^2 \le 4$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la circunferencia y comprobar si la verifica o no dicha desigualdad (por ejemplo $x = 0$, $y = 0$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 \le 4$). Por tanto, la solución es el conjunto de puntos de la circunferencia y de su interior. (Ver figura)

Para resolver la segunda inecuación $y - x^2 \le 0$, despejamos y obteniéndose $y \le x^2$.

La curva $y = x^2$ es la parábola de vértice (0, 0) y de eje OY que pasa por el punto (1, 1). Para determinar la región donde se verifica $y \le x^2$ basta elegir un punto que no esté en la parábola y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 4$). Por tanto, la solución está formada por el conjunto de puntos que están en la parábola y debajo de ella. (Ver figura)

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



36. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} y - 1 > e^x \\ 7y - 8 > 4\ (2y - 3) \\ -4(x + 2) \le 0 \end{cases}$

Solución

En primer lugar se resuelve la primera inecuación, para ello se despeja y obteniéndose $y > e^x + 1$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = e^x + 1$ que es la curva que se indica en el dibujo (ver Temas 2 y 3), y se consideran los puntos que verifican $y > e^x + 1$, para lo cual basta comprobar la desigualdad con un punto cualquiera que no esté en la curva (por ejemplo $x = 0$, $y = 1$ es un punto que no cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 > 2$). Por tanto, la solución es la región que no contiene al punto (0, 1). (Ver figura)

Para resolver la segunda inecuación se despeja *y* realizando las operaciones que siguen:

$$7y - 8 > 4(2y - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 7y - 8 > 8y - 12 \quad \Leftrightarrow \quad -y > -4 \quad \Leftrightarrow \quad y < 4$$

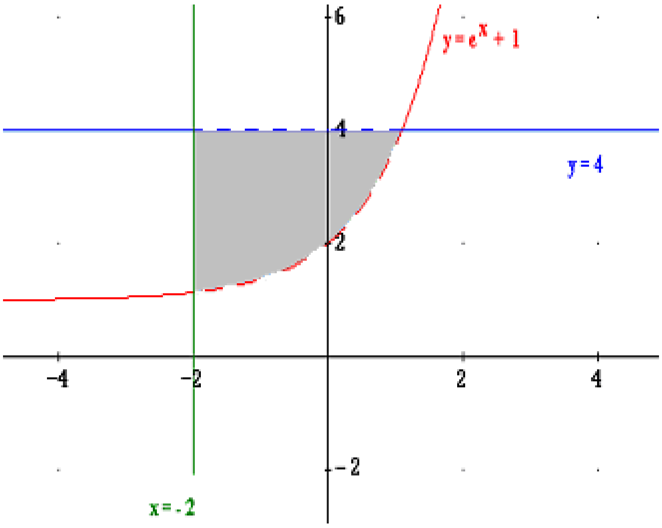
Dibujamos $y = 4$ que es la recta horizontal que pasa por (0, 4) y se considera la región donde se verifica $y < 4$, que es el semiplano situado por debajo de la recta $y = 4$. (Ver figura)

Para resolver la tercera inecuación se despeja *x* operando como sigue:

$$-4(x + 2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2$$

Dibujamos $x = -2$ que es la recta vertical que pasa por (-2, 0) y se considera la región donde se verifica $x \geq -2$, que es el semiplano situado a la derecha de la recta $x = -2$ incluida dicha recta. (Ver figura)

La solución del sistema es la intersección de las tres regiones anteriores y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



37. Resolver las inecuaciones: **a)** $yx - x \geq 1 + 2y$ **b)** $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$

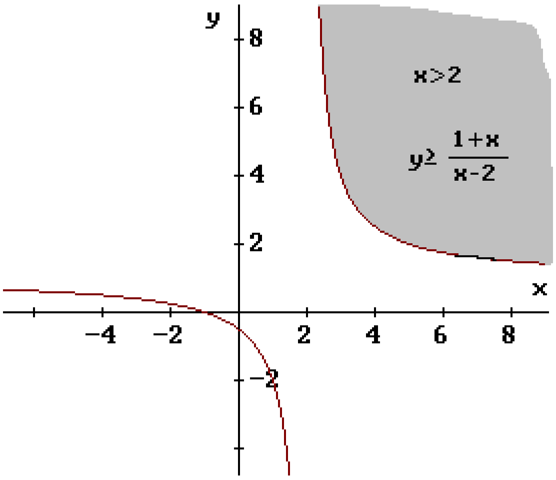
Solución

a) En primer lugar, para despejar la incógnita *y*, se pasan al primer miembro los términos en los que aparece esa incógnita y el resto se pasan al segundo, quedando $yx - 2y \geq 1 + x$.

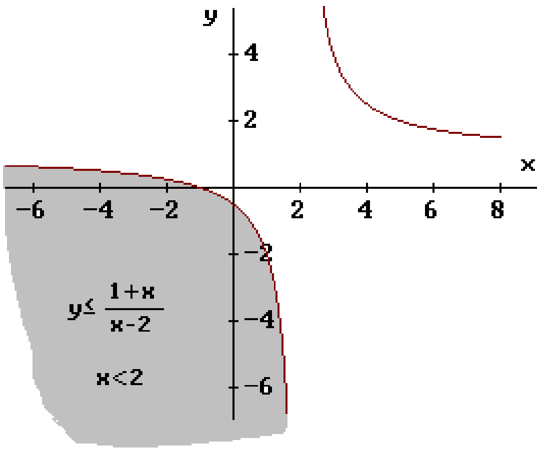
Se saca *y* factor común, obteniéndose $y(x - 2) \geq 1 + x$.

A continuación, se resuelve esta inecuación considerando tres casos según el signo de $x - 2$:

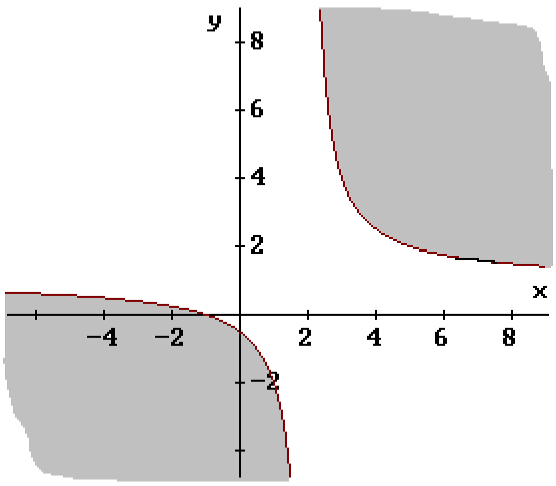
- Si $x = 2$ la inecuación queda $0 \geq 3$, desigualdad que es falsa para cualquier valor de *y*, por tanto, en este caso no existe solución.
- Si $x > 2$ entonces $x - 2 > 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \geq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura y corresponde al conjunto de puntos del plano (*x*, *y*) situados a la derecha de la recta $x = 2$ y por encima o en la curva $y = \dfrac{1 + x}{x - 2}$ (ver Tema 3 para la representación de esta curva)



- Si $x < 2$ entonces $x - 2 < 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \leq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura



La solución de la inecuación inicial es la unión de las soluciones obtenidas en cada uno de los casos anteriores y corresponde a la región representada en la siguiente figura



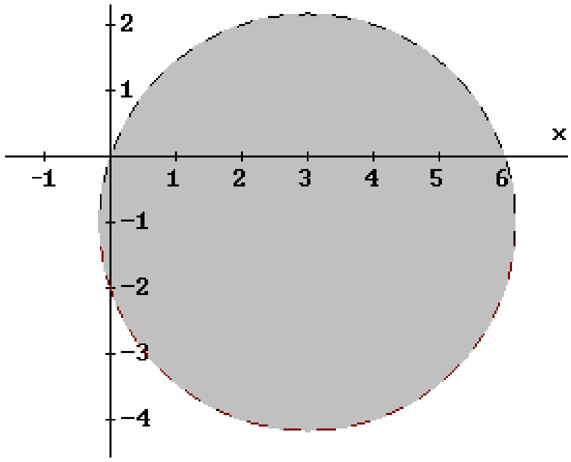
b) En primer lugar se considera la igualdad, $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Al ser una ecuación polinómica de segundo grado, tanto en x como en y, con los coeficientes de x^2 e y^2 iguales, veamos si corresponde a una circunferencia. Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de obtener una expresión de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow \left((x - 3)^2 - 9\right) + \left((y + 1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Esta última ecuación corresponde a la circunferencia de centro (3, -1) y radio $\sqrt{10}$, que se representa en la figura. Para determinar qué región corresponde a la solución de la inecuación, se elige un punto que no esté en la circunferencia, por ejemplo (1, 0) (está dentro de la circunferencia) y se sustituye en la inecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$ quedando $-5 < 0$. Al ser verdadera esta desigualdad, la solución son los puntos de la región interior a la circunferencia y aparecen sombreados en la siguiente figura.



38. Resolver las inecuaciones: **a)** $e^{2y} < x + 1$ **b)** $\sqrt[3]{x} \leq 1 + y$

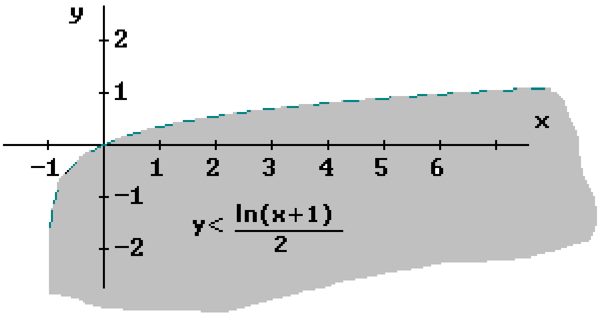
Solución

a) Para poder despejar y, se toman logaritmos neperianos, por ser el logaritmo la función inversa de la exponencial. Teniendo en cuenta, que además la función logarimo es estríctamente creciente se tiene: $e^{2y} < x + 1 \Leftrightarrow \ln e^{2y} < \ln(x + 1) \Leftrightarrow 2y < \ln(x + 1) \Leftrightarrow y < \dfrac{\ln(x+1)}{2}$.

A continuación se representa la curva definida por la igualdad $y = \dfrac{\ln(x+1)}{2}$ (ver Tema 3)

Para determinar qué región corresponde a la solución, se elige un punto que no esté en la curva, por ejemplo (0, 1) y se sustituye en la inecuación $y < \dfrac{\ln(x+1)}{2}$ quedando $1 < 0$. Al ser falsa esta desigualdad, se sigue que los puntos de esta región no son solución de la inecuación.

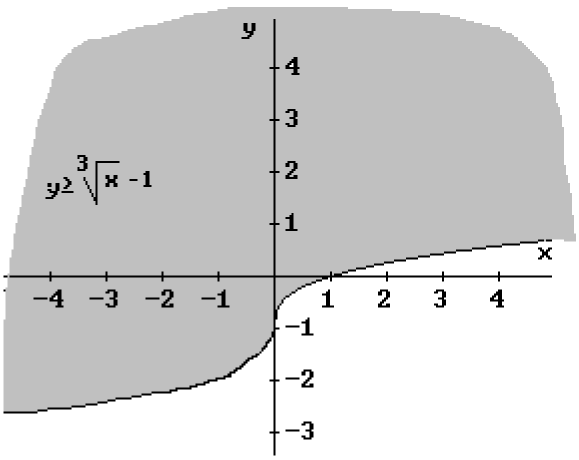
Por tanto, la solución es la región sombreada en la siguiente figura sin incluir el borde.



b) Para resolver $\sqrt[3]{x} \leq 1 + y$, en primer lugar, se despeja la incógnita *y* quedando $\sqrt[3]{x} - 1 \leq y$. A continuación se representa la curva definida por la igualdad $y = \sqrt[3]{x} - 1$ (ver Tema 3).

Para determinar qué región corresponde a la solución, se elige un punto que no esté en la curva, por ejemplo (0, 0) y se sustituye en la inecuación quedando $-1 \leq 0$. Al ser verdadera esta desigualdad, se sigue que los puntos de esta región son solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es el conjunto de puntos sombreados en la siguiente figura incluidos los de la curva $y = \sqrt[3]{x} - 1$.



NÚMEROS COMPLEJOS

39. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

a) $(z_1 - z_2)\,z_3$	**b)** $z_1 z_4 + z_3 z_4$	**c)** $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$	**d)** $z_1 + z_3^{-1}$	**e)** z_2^{-1}
f) $\overline{\overline{z_1 z_2}}$	**g)** $\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1}$	**h)** $z_1^2 z_3$	**i)** $\frac{z_2}{z_1}$	**j)** $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2)\,z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3:

$$(z_1 - z_2)\, z_3 = \big(-3+4i - (5-2i)\big)\frac{3}{2} = \big(-3-5+(4+2)i\big)\frac{3}{2} = (-8+6i)\frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan $z_1 z_4$ y $z_3 z_4$ para después sumar los resultados:

$$z_1 z_4 = (-3+4i)\, 7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3 z_4 = \frac{3}{2}\, 7i = \frac{21}{2} i$$

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = -28-21i + \frac{21}{2} i = -28 - \frac{21}{2} i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 + z_3)\, z_4 = \left(-3 + 4i + \frac{3}{2}\right)7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right)7i = \frac{-21}{2} i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2} i$$

c) En primer lugar se calcula la operación $z_1 + z_4 - 5z_2 = -3+4i + 7i - 5(5-2i) = -28+21i$ y después se halla su conjugado, $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2} = -28-21i$

d) El inverso de z_3 es $z_3^{-1} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$ y, por tanto, $z_1 + z_3^{-1} = -3+4i + \dfrac{2}{3} = \dfrac{-7}{3}+4i$

e) Para calcular el inverso de $z_2 = 5-2i$ se escribe como un cociente y se efectua la división multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} = \frac{1(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i}{25-4i^2} = \frac{5+2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$$

f) Teniendo en cuenta que el conjugado del conjugado de un número es el propio número, es decir, $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2$, se tiene $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+6i+20i-8i^2 = -7+26i$

g) En primer lugar, se realiza la suma de z_1 y z_2, después se calcula el conjugado de este resultado y finalmente el inverso de éste último:

$$z_1 + z_2 = -3+4i + 5-2i = -3+5+(4-2)i = 2+2i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 2-2i$$

$$\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i}{4-4i^2} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$$

Observar que se podría haber invertido el orden de realización de las dos últimas operaciones ya que se verifica $\left(\overline{a + bi}\right)^{-1} = \overline{(a+bi)^{-1}}$

h) $z_1^2 z_3 = (-3+4i)^2 \dfrac{3}{2} = (9-24i+16i^2)\dfrac{3}{2} = (9-24i-16)\dfrac{3}{2} = (-7-24i)\dfrac{3}{2} = \dfrac{-21}{2} - 36i$

i) Se efectúa el cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{-3+4i} = \frac{(5-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-15-20i+6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-15-14i-8}{9+16} = \frac{-23-14i}{25} = \frac{-23}{25} - \frac{14}{25} i$$

j) En primer lugar se calcula el denominador

$$2z_3 + z_4 = 2\frac{3}{2} + 7i = 3+7i$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cociente queda:

$$\frac{z_1}{2z_3+z_4} = \frac{-3+4i}{3+7i} = \frac{(-3+4i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{-9+21i+12i-28i^2}{9-49i^2} = \frac{-9+33i+28}{9+49} = \frac{19+33i}{58} = \frac{19}{58}+\frac{33}{58}i$$

40. Resolver en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ **b)** $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ **c)** $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Solución

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 3t - 10 = 0$, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

- Considerando la solución $t = -5$, se obtiene $x^2 = -5$, de donde $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{5}i$
- Considerando la solución $t = 2$, se obtiene $x^2 = 2$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones en $\mathbb{R}$ son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ y las soluciones en $\mathbb{C}$ son, además de las dos anteriores, $x = \sqrt{5}i$ y $x = -\sqrt{5}i$.

b) Factorizando el polinomio, la ecuación $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ queda $x(x^2+5x+6) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $x^2 + 5x + 6 = 0$, de donde, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$ son $x = 0$, $x = -2$ y $x = -3$.

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 2t + 1 = 0$, que se puede escribir de la forma, $(t+1)^2 = 0$, cuya solución es $t = -1$, doble.

Considerando la solución $t = -1$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$ y las soluciones en $\mathbb{C}$ son $x = i$ y $x = -i$, dobles.

41. Determinar una ecuación de coeficientes reales cuyas soluciones en $\mathbb{C}$ sean -3, $2+i$ y $2-i$.

Solución

Si -3, $2+i$ y $2-i$ son las soluciones de una ecuación, esta ha de ser proporcional a

$$(x-(-3))\,(x-(2+i))\,(x-(2-i)) = 0$$

realizando el producto del primer miembro de la ecuación se tiene

$$(x-(-3))\,(x-(2+i))\,(x-(2-i)) = (x+3)\,(x-2-i)\,(x-2+i) = (x+3)\,((x-2)^2-i^2) = (x+3)\,(x^2-4x+4+1) =$$
$$= (x+3)\,(x^2-4x+5) = x^3 - x^2 - 7x + 15$$

Por tanto, una de las ecuaciones que cumplen la condición indicada es $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

42. Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Solución

Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada, las cuatro raíces del polinomio buscado son $-4i$, $4i$, $-5+2i$ y $-5-2i$.

Por tanto, el polinomio es cualquiera proporcional a:

$$(x-(-4i))\,(x-4i)\,(x-(-5+2i))\,(x-(-5-2i)) = (x+4i)\,(x-4i)\,(x+5-2i)\,(x+5+2i) =$$

$$= (x^2 - 16i^2)\,((x+5)^2 - 4i^2) = (x^2+16)\,(x^2+10x+25+4) = (x^2+16)\,(x^2+10x+29) =$$

$$= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$$

5. Dada una ecuación polinómica de grado 4 de coeficientes reales, responder a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántas soluciones imaginarias puede tener si una de sus raíces es real?

b) Si 8i y 5-3i, son dos soluciones, ¿cuáles son las otras soluciones?

Solución

a) Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces reales o imaginarias. Teniendo en cuenta que si tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada y que una de sus raíces es real, se deduce que este polinomio de grado 4 o no tiene raíces imaginarias o tiene 2.

b) Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también a su conjugada, las otras dos soluciones serán las conjugadas de las dadas, es decir, -8i y 5+3i.