EJERCICIOS PARA RESOLVER

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & \frac{3}{5} & 3 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $A + B^t$ **b)** AB y BA **c)** $(5B+A^t)^t$ **d)** $(AB)^2$

Solución

a) $A + B^t = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & \frac{-27}{5} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 5 & \frac{-44}{5} & -5 \\ 25 & \frac{-193}{5} & 2 \\ 0 & \frac{-6}{5} & -6 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -30 & 19 \\ 3 & \frac{-48}{5} \end{pmatrix}$

c) $(5B+A^t)^t = \begin{pmatrix} 26 & -30 & 20 \\ -3 & -3 & 13 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 26 & -3 \\ -30 & -3 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$

d) $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -195 & \frac{7542}{25} & \frac{-63}{5} \\ -840 & \frac{31689}{25} & \frac{-1071}{5} \\ -30 & \frac{1338}{25} & \frac{168}{5} \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcular AB y BA.

Solución

$AB = (-7)$ $BA = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 15 & -5 & 20 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

3. Calcular el rango de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 3 & -12 & -18 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 14 & 21 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución

a) rg A = 1 **b)** rg A = 2 **c)** rg A = 2 **d)** rg A = 3

4. Determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real *a*.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ a & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & -10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **e)** $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$ **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$

Solución

a) Si $a = 2$, entonces rg $A = 1$ y si $a \neq 2$, entonces rg $A = 2$

b) Si $a = \frac{-2}{5}$, entonces rg $A = 1$ y si $a \neq \frac{-2}{5}$, entonces rg $A = 2$

c) Si $a = \frac{10}{7}$, entonces rg $A = 2$ y si $a \neq \frac{10}{7}$, entonces rg $A = 3$

d) Si $a = \frac{12}{11}$, entonces rg $A = 2$ y si $a \neq \frac{12}{11}$, entonces rg $A = 3$

e) Para cualquier valor de *a* se tiene que rg $A = 2$.

f) Si $a = \frac{7+\sqrt{33}}{2}$ o $a = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$, entonces rg $A = 2$ y si $a \neq \frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$, entonces rg $A = 3$

5. Sabiendo que las siguientes matrices tienen inversa, calcularla mediante operaciones elementales.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprobar que se verifican los siguientes resultados:

a) $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$ **b)** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **c)** $(AB)^{-1} \neq A^{-1}\, B^{-1}$

d) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ **e)** $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$

Solución

a) $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$

b) $AB = \ (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

c) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$

d) $(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$ $A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-8}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

e) $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

7. Calcular los adjuntos de los elementos a_{23}, a_{32} y a_{42} de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

$A_{23} = -24$ $A_{32} = -2$ $A_{42} = 0$

8. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Solución

Aplicamos la propiedad de los determinantes que dice: "El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal"

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.3.1(-1) = -3$$

9. Sabiendo que A y B son matrices de orden 3 tales que $|A| = 5$ y $|B| = -6$, calcular:

a) $|AB|$ **b)** $|B^t|$ **c)** $|ABA^t|$ **d)** $|(AB)^t|$ **e)** $|A^{-1}|$ **f)** $|2B|$ **g)** $|A^2|$

Solución

a) $|AB| = -30$ **b)** $|B^t| = -6$ **c)** $|ABA^t| = -150$ **d)** $|(AB)^t| = -30$

e) $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$ **f)** $|2B| = -48$ **g)** $|A^2| = 25$

10. Decir si las siguientes matrices son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa mediante adjuntos.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por tanto la matriz es regular y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, por tanto la matriz tiene inversa y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-7}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$

c) Al ser una matriz 2x3 no es cuadrada y, por lo tanto no tiene inversa.

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Al ser el determinante igual a cero la matriz no tiene inversa.

11. Mediante adjuntos, calcular la inversa de las siguientes matrices para aquellos valores del parámetro real a que sea posible

a) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2a & 9 \end{pmatrix}$

Solución

a) $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2 \neq 0$, por tanto, la matriz tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a siendo

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ (\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{a^2+2}\begin{pmatrix} a & -2a & 2 \\ 1 & a^2 & -a \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+2} & \frac{-2a}{a^2+2} & \frac{2}{a^2+2} \\ \frac{1}{a^2+2} & \frac{a^2}{a^2+2} & \frac{-a}{a^2+2} \\ \frac{-1}{a^2+2} & \frac{2}{a^2+2} & \frac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} a & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2a & 9 \end{vmatrix} = 2a^2 - 64a + 174 = 2(a-3)(a+29)$

Esta matriz tiene inversa para valores de a distintos de 3 y de 29 y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{2(a-3)(a-29)}\begin{pmatrix} 36+2a & 9-10a & 21 \\ -94 & 9a+20 & a-50 \\ 20a-16 & -2a^2-4 & 4a+10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{18+a}{(a-3)(a-29)} & \frac{9-10a}{2(a-3)(a-29)} & \frac{21}{2(a-3)(a-29)} \\ \frac{-47}{(a-3)(a-29)} & \frac{9a+20}{2(a-3)(a-29)} & \frac{a-50}{2(a-3)(a-29)} \\ \frac{10a-8}{(a-3)(a-29)} & \frac{-a^2-2}{(a-3)(a-29)} & \frac{2a+5}{(a-3)(a-29)} \end{pmatrix}$$

12. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 1 \\ 4 & 12 & -25 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

a) rg A = 3

b) rg A = 2

c) rg A = 3

d) rg A = 2

13. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro real a.

a) $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Si $a \neq 3$, entonces rg A = 2 y si $a = 3$, entonces rg A = 1.

b) rg A = 2 para cualquier valor del parámetro a.

c) Si $a \neq 2$ y $a \neq -3$, entonces rg A = 3.

Si $a = 2$, entonces rg A = 2.

Si $a = -3$, entonces rg A= 3.

14. Discutir y resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 3x - 3y + z = 8 \end{array}\right\}$

Solución

rg$A$ = 2 ≠ rg($A|B$) = 3, por tanto el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

15. Discutir y resolver el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ x - 3y = -5 \\ 3x + y = 5 \end{array}\right\}$

Solución

rg$A$ = rg($A|B$) = nº de incógnitas = 2, por tanto el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única: $x = 1$, $y = 2$

16. Discutir y resolver el sistema lineal: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + 5y - z = 9 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 3 \end{array}\right\}$

Solución

rg$A$ = 2 = rg ($A|B$) < 3 = nº de incógnitas, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones: $x = 1 - z$, $y = 2$, $z \in \mathbb{R}$.

17. Hallar las matrices B que cumplen la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$B = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$ con c, $d \in \mathbb{R}$.

18. ¿Para qué valores reales de a los siguientes sistemas tienen solución no nula? Resolverlos para esos valores de a.

a) $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 0 \\ 2x - ay + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x - ay = 0 \\ 4x - y = 0 \\ ax + y = 0 \end{array}\right\}$

Solución

a) El sistema tiene solución no nula para $a = 2$ y $a = 1$.

Para $a = 2$, las soluciones son $x = \frac{-2z}{3}$, $y = \frac{z}{3}$, $z \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$, las soluciones son $x = -z$, $y = 0$, $z \in \mathbb{R}$.

b) El sistema tiene solución no nula para $a = \frac{1}{2}$ y las soluciones son $y = 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

19. Estudia según los valores reales de a si el sistema $\left.\begin{array}{r} 8x + 8y - 5z = 5a - 4 \\ ax - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = 5a \end{array}\right\}$ es de Cramer y calcula en estos casos su solución.

Solución

El sistema es de Cramer para $a \neq 2$ y su solución es:

$$x = \frac{5a+6}{2-a}, \quad y = \frac{-10a^2 - 22a - 12}{2-a}, \quad z = \frac{-15a^2 - 30a - 8}{2-a}$$

20. Discutir y resolver según los valores reales de a y b el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = b \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay - z = b \end{array}\right\}$$

Solución

- $a \neq 0$ y b cualquier valor $\Rightarrow$ el sistema es de Cramer

  La solución es: $x = \frac{b(3a+1)}{2a}$, $y = -\frac{b}{a}$, $z = \frac{b(a-1)}{-2a}$

- $a = 0 \Rightarrow$ el sistema no es de Cramer

  Se distinguen los siguientes casos:

  - Si $b \neq 0$, entonces el sistema es incompatible.
  - Si $b=0$, entonces el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son $x=z$, $y=-2z$, $z\in \mathbb{R}$